§ 7. Полнота S[1]

$D1$. Формула следования $x \vdash y$ есть сильная тавтология, если и только если $x \vdash y$ есть тавтология в смысле $D1$ пятого параграфа и при этом в y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в x.

$D2$. Каноническая форма высказывания:

1) x: $\sim x$ находится в канонической форме;

2) $x^1:\ldots:x^n (n \geqslant 1)$ находится в канонической форме, если выполнены следующие условия: a) $x^1, \ldots, x^n$ суть высказывания вида $(\alpha^{i1} a^{i1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{im} a^{im})$ $(m \geqslant 1)$, где $\alpha^{i1}, \ldots, \alpha^{im}$ означают наличие или отсутствие отрицания; b) все $\alpha^{ik}a^{ik}$ попарно различны и упорядочены так, что если в $\alpha^{ir}a^{ir}$ и $\alpha^{is}a^{is}$ элементарное высказывание a^{ir} предшествует в алфавитном порядке элементарному высказыванию a^{is}, то $r < s$; если же в $\alpha^{ir}\, a^{ir}$ и $\alpha^{is}\, a^{is}$ элементарные высказывания a^{ir} и a^{is} совпадают, α^{ir} означает отсутствие, а α^{is} — наличие отрицания, то $r < s$; c) все x^i попарно различны;

3) высказывание находится в канонической форме только в силу пунктов 1 и 2.

*D*3. Высказывание y есть каноническая форма для высказывания x, если и только если y находится в канонической форме, и $x \vdash y$ и $y \vdash x$ суть теоремы S^1.

*D*4. Формула следования $x \vdash y$ находится в канонической форме, если и только если x и y находятся в канонической форме, множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, и в y входят все те высказывания вида $\sim zz$, которые входят в x.

*D*5. Формула следования $x^* \vdash y^{**}$ есть каноническая форма для $x \vdash y$, если и только если x^* есть каноническая форма для x, имеющая вид $x^1 : \ldots : x^n$ $(n \geqslant 1)$, а y^{**} есть каноническая форма для $y^*z\ (v : \sim v)$, где y^* есть каноническая форма для y, z есть высказывание вида $z^1z^2 \ldots z^m$ $m \geqslant 0)$ (где z^i есть высказывание вида $\sim aa$, входящее в x^*, но не входящее в y^*), а v есть конъюнкция элементарных высказываний, которые не входят в y^*, но входят в x^*, за исключением таких, которые входят в x^i вместе с их отрицанием.

*T*1. $x \sim x : xy \vdash xy$

1. $x \sim x : xy \vdash y$	[*A*13, *T*23 I2, *R*1]
2. $x \sim x : xy \vdash x$	[*A*13, *T*1 I2, *R*1]
3. $x \sim x : xy \vdash xy$	[1, 2, *R*2]

$T2.\ xy \vdash x \sim x : xy$

1. $xy \vdash xy\,(x : \sim x)$ [$T18$ I2, $T19$ I2, $R3$]
2. $xy \vdash x \sim x : xy$ [1, $T10$ I2, $A13$, $A3$, $R1$]

$T3.\ x \sim xz : y \vdash y$

1. $x \sim xz : y \vdash (x \sim xz : y)\,(x : \sim x)\,(z : \sim z)$ [$T20$ I2, $R2$]
2. $x \sim xz : y \vdash (y : x \sim xz)\,(xz : x \sim z : \sim xz : \sim x \cdot \sim z)$ [1, $A13$, $T10$ I2, $R3$, $R1$]
3. $x \sim xz : y \vdash (xzy : x \sim xz) : x \sim zy : : \sim xzy : \sim x \sim zy$ [2, $A14$, $A11$ $R1$]
4. $x \sim xz : y \vdash xzy : x \sim zy : \sim xzy : \sim x \sim zy$ [3, $A13$, $T10$ I2, $R3$, $T1$, $T2$, $R1$]
5. $x \sim xz : y \vdash y$ [4, $A13$, $T1$ I2, $R1$]

$MT1$. Для любого высказывания x может быть найдена его каноническая форма y.

Доказательство $MT1$. 1 случай: x совпадает с y. По $T2$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 2 случай: в x не входит знак дизъюнкции, а знак отрицания находится только перед элементарными высказываниями. По T3I2 и T4I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 3 случай: x имеет вид $x^1: \ldots : x^n$. Если не имеет место 1 случай, по $T17$I2, $A7$, $A8$, $A13$, $T10$I2, T 13I2, $T14$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 4 случай: x имеет вид $\sim (x^1 : \ldots : x^n)$. На основании $A9$, $A10$, $A7$, $A8$, $A13$, $T10$I2, $T13$I2, $T14$I2 получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 5 случай: x имеет вид yz. Если не имеют места 1 и 2 случаи, по $A7$—$A10$, $A13$, $T10$I2, $T13$I2, $T14$I2 получаем $x \vdash v$ и $v \vdash x$, где v есть высказывание вида $x^1 : \ldots : x^n$. По 3 случаю имеем $v \vdash y$ и $y \vdash v$. Отсюда на основании правила $R1$ получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$. 6 случай: x имеет вид $\sim (zv)$. По $A7$, $A8$ и далее как в 3 случае получаем $x \vdash y$ и $y \vdash x$.

$MT2$. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то для нее может быть найдена каноническая форма $x^* \vdash y^{**}$. Последняя также есть сильная тавтология.

Доказательство $MT2$. В силу $MT1$ для любой $x \vdash y$ может быть найдена формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть соответственно канонические формы для x и y. Из $D3$, $MT2I4$ и $MT4I5$ следует, что x и x^*, y и y^* соответственно равнозначны, и множества элементарных высказываний, входящих в них, совпадают. Поэтому если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то и $x^* \vdash y^*$ есть сильная тавтология. Так как в y^* входят только те элементарные высказывания, которые входят в x^*, то может быть найдено такое y^*z $(v : \sim v)$, удовлетворяющее условиям $D5$, что множество элементарных высказываний, входящих в него, совпадет с множеством элементарных высказываний, входящих в x. На основании $MT1$ для y^*z $(v : \sim v)$ может быть найдена каноническая форма y^{**}. Если $\sim x$ не есть тавтология, то y^{**} есть каноническая форма для y^* $(v : \sim v)$. Очевидно, что в этом случае y^{**} равнозначно y^*. Следовательно, $x^* \vdash y^{**}$ в данном случае является сильной тавтологией. Если $\sim x$ — тавтология, то x^* в $x^* \vdash y^{**}$ принимает значение 0 при любых комбинациях значений входящих в него элементарных высказываний. Поэтому и в этом случае $x^* \vdash y^{**}$ является сильной тавтологией.

$MT3$. $x \vdash y$ есть теорема S^1, если и только если ее каноническая форма $x^* \vdash y^{**}$ есть теорема S^1.

Доказательство $MT3$. Пусть $x \vdash y$ есть теорема S^1. Покажем, что в этом случае $x^* \vdash y^{**}$ есть также теорема S^1. Формула $x^* \vdash y^*$, где x^* и y^* суть канонические формы для x и y, является теоремой S^1, так как она может быть получена по правилу $R1$ из $x \vdash y$ на основании $D2$ и $MT1$. Если множества элементарных высказываний, входящих в x и y, совпадают, и в x^* нет вхождений вида $\sim aa$, которых не было бы в y^*, то $x^* \vdash y^{**}$ совпадает с $x^* \vdash y^*$. Если в x^* входят высказывания $z^1, \ldots, z^m$, которые не входят в y^*, то на основании $A13$, $T1I2$, $R1$, $R2$ получаем $x^* \vdash$ $\vdash y^*z$, где z есть высказывание вида $z^1 \cdot \ldots \cdot z^m$. Если в x^* входят элементарные высказывания $v^1, \ldots, v^k$, которые не входят в y^*, то по $T20I2$, используя $A11$ и $A12$ и применяя

$R1$ и $R2$ получаем $x^* \vdash y^*$ $(v : \sim v)$, где v есть $v^1 \cdot \ldots \cdot v^k$. Таким образом, мы показали, как от $x \vdash y$ перейти к $x^* \vdash y^*z$ $(v : \sim v)$. По $T10I2$ и $R1$ отсюда следует $x^* \vdash y^{**}$.

Пусть $x^* \vdash y^{**}$ есть теорема S^1. Покажем, что тогда $x \vdash y$ также является теоремой S^1. Действительно, на основании $A13$, $T10I2$, $A3$, $T1I2$, $R2$ и $R3$ от $x^* \vdash y^{**}$ можно перейти к $x^* \vdash y^*$ и далее в силу $D2$ и $MT1$ получить $x \vdash y$.

*MT*4. Пусть формула $x \vdash y$ есть сильная тавтология, в канонической форме, имеющей вид $x^1: \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k$. Если $\sim x$ не является тавтологией, то $x^1, \ldots, x^i$ имеют такое вхождение в y, что совпадает с некоторыми (не обязательно со всеми) из $y^1, \ldots, y^k$, так что $k \geqslant i$.

Доказательство $MT4$. Так как $\sim x$ не есть тавтология, то из $D2$ следует, что при любой комбинации значений входящих в x элементарных высказываний либо все x^j принимают значение 0, либо одно и только одно из x^j принимает значение 1, а остальные принимают значение 0. При этом каждое из x^j принимает значение 1 при одной и только одной комбинации значений входящих в x элементарных высказываний. То же самое справедливо и для $y^1, \ldots, y^k$. Из $D1$ и $D3$ следует, что множества элементарных высказываний, входящих в x^j и y^j, совпадают. На основании $D1$ отсюда вытекает, что $x^1, \ldots, x^i$ должны совпадать с высказываниями из $y^1, \ldots, y^k$. Действительно, если x^j не совпадает ни с одним из $y^1, \ldots, y^k$, то при некоторой комбинации значений входящих в x элементарных высказываний x^j принимает значение 1, а y — значение 0. Поэтому если $x \vdash y$ есть тавтология, то $x^1, \ldots, x^i$ входят в y, так что $k \geqslant 1$.

*MT*5. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, находящаяся в канонической форме, то она есть теорема S^1.

Доказательство $MT5$. Пусть в $x \vdash y$ не входит высказывание вида $\sim aa$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид $x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^r$, где r есть число элементарных высказываний, входящих в $x \vdash y)$. В силу $MT4$ и на основании закона коммутации для дизъюнкции $T8I2$ достаточно показать, что формула $x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots x^k$ $(i \leqslant k \leqslant 2^r)$ есть теорема S^1. В зависимости от k доказательство подразделяется на четыре случая. 1 случай: $i = k$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид $x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^i$ и доказуема согласно $T2I2$. 2 случай: $k = 2^r$. По $T20I2$, используя $A11$ и $A12$, имеем

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^1 : \ldots : x^i)(x^1 : \sim x^1).$$

Отсюда по $T1I2$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \sim x^1$$

Согласно $A7$ и $A8$ отрицание конъюнкции, содержащей r различных элементарных высказываний, дает каноническую форму, состоящую из $2^r - 1$ члена. Следовательно, на основании правила $R3$ и $A12$ получаем:

$$x^1 : \sim x^1 \vdash x^1 : \ldots : x^k \, (k = 2^r).$$

Отсюда по правилу $R1$ имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \, (k = 2^r).$$

3 случай: $k = 2^r - 1$. Согласно 2 случаю имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \, (k = 2^r).$$

Используя $T8I2$, $A11$, $A7$, $A8$ и $R3$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^k \vdash x^l : \sim x^l \, (i \leqslant l \leqslant 2^r).$$

По правилу $R1$ отсюда следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^l : \sim x^l.$$

Применяя правило $R1$ к полученной формуле и к формуле, доказанной в 1 случае, имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^l : \sim x^l)(x^1 : \ldots : x^i).$$

На основании $A14$ получаем:

$$(x^l : \sim x^l)(x^1 : \ldots : x^i) \vdash x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l$$

Отсюда по правилу $R1$ следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l.$$

Так как x^l не входит в $x^1 : \ldots : x^i$, а все члены канонической формы различны, то в $x^l x^j$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$ есть элементарное высказывание вместе с его отрицанием. Используя $A11$ и применяя i раз $T315$, получаем:

$$x^l x^1 : \ldots : x^l x^i : \sim x^l \vdash \sim x^l.$$

По правилу $R1$ имеем;

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash \sim x^l.$$

По $A7$ следует:

$$\sim x^l \vdash x^1 : \ldots : x^i : \ldots : x^{l-1} : x^{l+1} : \ldots : x^k \ (k = 2^r - 1).$$

Следовательно, по правилу $R1$,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \ (k = 2^r - 1)$$

4 случай: $i < n < 2^r - 1$. Пусть $l = i + 1$.
Согласно 3 случаю,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^i : x^{i+2} : \ldots : x^k.$$

Пусть $l = i + 2$. Тогда по 3 случаю,

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash \sim x^{i+2}$$

По правилу $R2$, используя одновременно $T812$, получаем;

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash (x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^i : x^{i+3} : \ldots : x^k) \sim x^{i+2}$$

На основании $A14$ имеем:

$$(x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k) \sim x^{i+2} \vdash x^{i+2} \sim x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k$$

По $T315$, используя $A11$, получаем:

$$x^{i+2} \sim x^{i+2} : x^1 : \ldots : x^k \vdash x^1 : \ldots : x^k \ (k = 2^r - 2)$$

Применяя правило $R1$ к трем последним формулам, имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash x^1 : \ldots : x^k \ (k = 2^r - 2).$$

Действуя аналогичным образом, можно исключить любой $x^l (i < l \leqslant 2^r)$ член дизъюнкции

Пусть в $x \vdash y$ входит высказывание вида $\sim aa$. Тогда $x \vdash y$ имеет вид

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^s, 1 \leqslant k \leqslant 2^s),$$

где s есть число элементарных высказываний $z^1, \ldots, z^s$, входящих в $x \vdash y$, за исключением a. По $T2012$, $T112$, $A11$, $A12$ и $R1$ имеем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash z : \sim z,$$

где z есть конъюнкция $z^1, \ldots, z^s$. По $A13$, $T112$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash w,$$

где w есть конъюнкция всех высказываний вида $\sim aa$. Из полученных формул по $R2$ следует:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash w(z : \sim z).$$

Отсюда по $A7$, $A8$, $T1012$, $R3$ и $R1$ получаем:

$$x^1 : \ldots : x^i \vdash y^1 : \ldots : y^k \qquad (k = 2^s)$$

На основании $T812$, $T317$, $A11$ и $R1$ получаем искомую формулу.

Из $MT2$ — $MT5$ следует метатеорема:

$MT6$. Если $x \vdash y$ есть сильная тавтология, то она есть теорема S^1.

Система S^1 полна в смысле $MT6$.

$MT7$. Если $x \supset y$ есть тавтология, и при этом в y не входят элементарные высказывания, не входящие в x, то $x \vdash y$ есть теорема S^1.

$MT8$. Если $x \vdash y$ доказуема в S^1 и при этом в x и y входят одинаковые элементарные высказывания, то $\sim y \vdash \sim x$ доказуема в S^1.

Теорему $MT8$ можно рассматривать как производное правило вывода (правило контрапозиции). Она есть следствие $MT6$.